

带阻尼和恒定力矩的摆的动力特性

侯贺冬 任崇旭 谭泽人 陶毅松 于永震 杜超群

摘要

在这篇文章中, 我们讨论 $v' = -bv - \sin \theta + k, \theta' = v$ 系统的解的性质, 并尝试得到一些关于平衡点和周期解的性质, 并且得到吸引盆的大小估计。

I. 方程与平衡点

我们研究一个与运动有关方程

$$\begin{cases} \theta' = v, \\ v' = -bv - \sin \theta + k \end{cases}$$

其中 k, b 为参数。这个方程代表的含义是对于一个具有衡外力矩和具有与速度成正比的阻尼的摆的运动。

对于这个系统, 我们可以得出, 平衡点位置一定是 $v = 0$ 而且 $\sin \theta - k = 0$ 。当 $k > 1$ 时, 没有平衡点; 当 $k = 1$ 时, 平衡点处是一个高阶扰动, 对于 $k < 1$, 这个方程有两个平衡点 $\theta = \arcsin k, \theta = \pi - \arcsin k$, 其中 $\theta = \arcsin k$ 是稳定平衡点, 而 $\theta = \pi - \arcsin k$ 是鞍点 (可以由局部线性化得出)。

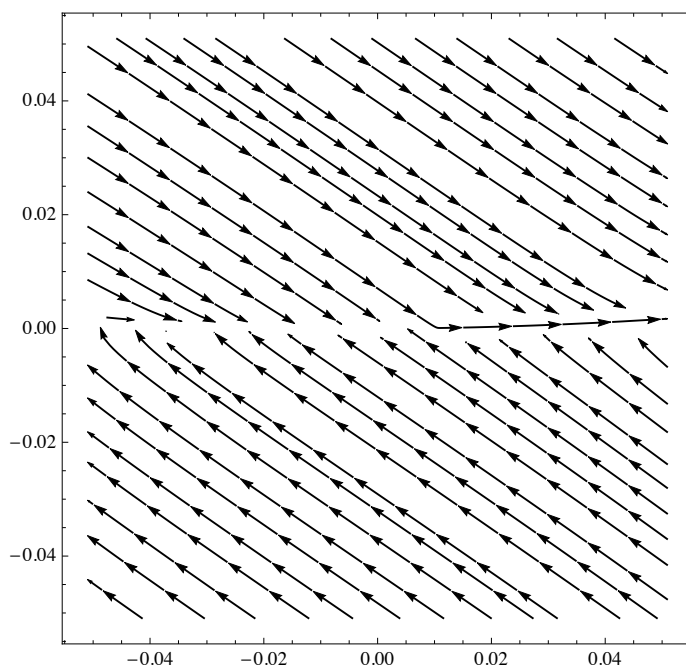
而在 $k < 1$ 时, 对于 $\theta = \arcsin k$, 我们不仅可以利用局部线性化, 也可利用 Lyapunov 函数证明其稳定性。取 $L(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - k\theta - \cos \theta + c$, 取 c 为一个合适的常数, 满足 $L(\arcsin k, 0) = 0$ 。对于 $(\arcsin k, 0)$ 附近的一个邻域, 我们可以利用 $L(\theta, v) \geq -k\theta - \cos \theta + c$ 。

$g(\theta) = -k\theta - \cos \theta + c$, 并 $g'(\theta) = -k + \sin \theta, g''(\theta) = \cos \theta > 0$ 可以得到 $g'(\theta)$ 在 $\theta = \arcsin k$ 处有极小值 0。

所以 L 为 Lyapunov 函数, 并且 $\frac{dL}{dt} = -bv^2 \leq 0$, 可以证明在该平衡点是稳定平衡点。

II. POINCARÉ 映射

这个微分方程也可以看成是以 $v'(\theta) = -b + \frac{-\sin \theta + k}{v}$ 的以 θ 为自变量的微分方程。为设流为 $\phi(\theta, v_0)$, 又 $v'(\theta) = f(\theta, v) = -b + \frac{-\sin \theta + k}{v}$, 则可以得出关系

图 1: 在 $k = 1$ 处体现的高阶扰动, 不是稳定平衡点

$$\begin{aligned}\phi(\theta, v_0) &= v_0 + \int_0^{2\pi} f(\delta, \phi(\delta, v_0)) d\delta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial v_0}(\theta, v_0) &= 1 + \int_0^{2\pi} \partial_2 f(\delta, \phi(\delta, v_0)) \cdot \partial_2 \phi(\delta, v_0) d\delta\end{aligned}$$

令 $z(\theta) = \partial_2 \phi(\theta, v_0)$, 那么对 θ 求导数,

$$z'(\theta) = \partial_2 f(\theta, \phi(\theta, v_0)) \cdot \partial_2 \phi(\theta, v_0) = \partial_2(\theta, \phi(t, \theta)) \cdot z(\theta)$$

解得 $z(t) = \exp \int_0^{2\pi} \partial_2(\delta, \phi(\delta, v_0)) d\delta$. 注意到 Poincaré 映射的值应该是 $p(v_0) = \phi(2\pi, v_0)$, 那么就有

$$\begin{aligned}p'(v_0) &= z(2\pi) = \exp \int_0^{2\pi} \partial_2(\delta, \phi(\delta, v_0)) d\delta > 0, \\ p''(v_0) &= p'(v_0) \left(\int_0^{2\pi} \partial_{22} f(\delta, \phi(\delta, v_0)) \cdot \exp \left(\int_0^\delta \partial_2(u, \phi(u, v_0)) du \right) d\delta \right)\end{aligned}$$

其中 $\partial_{22} f(\theta, \phi(\theta, v_0)) = \frac{2(k - \sin \theta)}{\phi^3(\theta, v_0)}$, 可以看出, 当 $k > 1$ 时, Poincaré 映射满足 $p''(v_0) > 0$. 所以在 $k > 1$ 时, Poincaré 映射是一个凸的单调增函数. 对于 Poincaré 映射, 我们有一个命题, $\lim_{v_0 \rightarrow \infty} p(v_0) - v_0$ 存在.

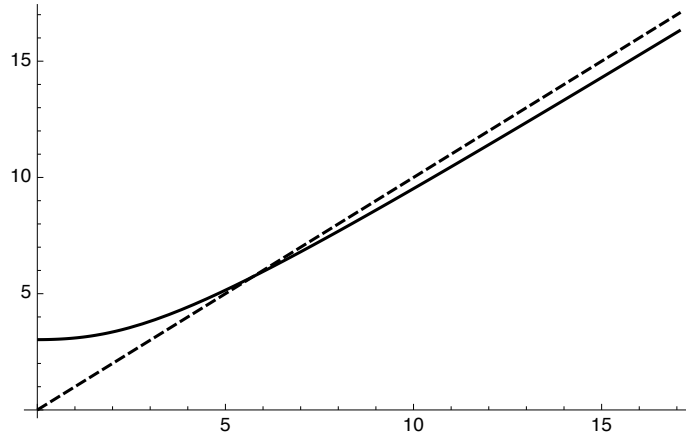


图 2: Poincaré 映射以及交点体现的不动点

证明. 由

$$\begin{aligned}
 v(2\pi) - v(0) &= \int_0^{2\pi} v'(\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} -b + \frac{k - \sin \theta}{v(\theta)} d\theta \\
 &= -2b\pi + \int_0^{2\pi} \frac{k - \sin \theta}{v(\theta)} d\theta
 \end{aligned}$$

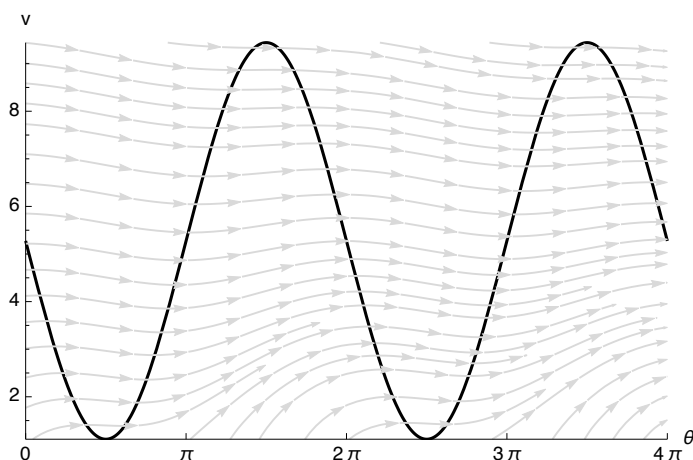
而对于 $|\int_0^{2\pi} \frac{k - \sin \theta}{v(\theta)} d\theta| \leq \int_0^{2\pi} |\frac{k - \sin \theta}{v(\theta)}| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{|k - \sin \theta|}{v(0)} d\theta = \frac{C}{v_0}$, 当 v_0 足够大的时候, 这一项可以忽略, 于是 $\lim_{v_0 \rightarrow \infty} p(v_0) - v_0 = -2b\pi$ \square

III. 流图和不动点位置

我们首先利用 **Mathematica** 的 **StreamPlot** 函数对解的流图进行观察, 尝试得出周期解的存在性, 即 **Poincaré** 映射的不动点的存在性以及所在的可能区间。假定 $k > 1$, 我们证明这种情形下不动点一定存在。

观察到 $v'(t) = -bv - \sin \theta + k$, 令 $v'(t) > 0$, 那么就有 $v < \frac{k - \sin \theta}{b}$ 。也就是说, $v = \frac{k - \sin \theta}{b}$ 对 $v - \theta$ 平面做了一个划分, 在曲线上方的, 随着时间的变化, 会使 v 减小, 在曲线下方的点, 随着时间的变化, v 会增大。

我们令 $v_1 = \frac{k-1}{b}, v_2 = \frac{k+1}{b}$ 。对于 $v_0 < 0$, 它最终会走到 $v > 0$ 的区域; 对 $0 < v_0 < v_1$ 或者 $v_0 > v_2$, 由于 $\theta'(t) > 0$, 可以得到 $\frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{dt} / \frac{d\theta}{dt}$ 为恒正或者恒负, 也就是说 $p(v_0) \neq v_0$ 。

图 3: $[v_1, v_2]$ 内的流图 (为了清楚取 $\theta \in [0, 4\pi]$)

于是 Poincaré 映射的不动点只可能在 $[v_1, v_2]$ 这个区间内部。然而对于初值在这个区间内部的解曲线, 是不可能逃出区间范围的, 这是因为在 v_1 处流的方向一致向上, 在 v_2 处流的方向一致向下。于是 $p([v_1, v_2]) \subseteq [v_1, v_2]$, 由 $p(v_0)$ 的连续性以及 Banach 不动点定理, 就必有一个不动点。

IV. 能量与周期解的唯一性

物理角度的能量函数 $E = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos \theta$ 在数学上可能是一个非常有用的函数。一方面 $\frac{dE}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dt} + \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = -bv^2 + kv$ 。我们可以只研究 $v > 0$ 的情形。

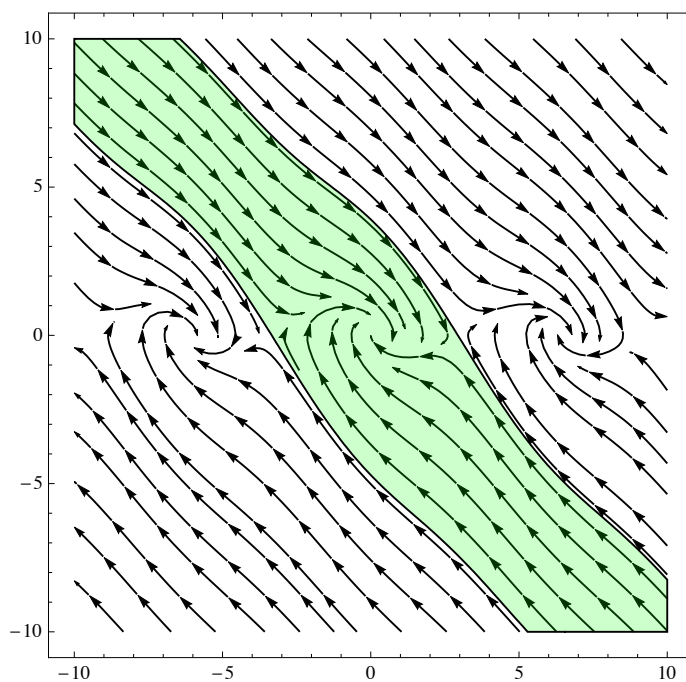
对于 $v - \theta$ 平面, 我们可以理解, 对于 $v > k/b$, 解的能量会随着时间减小; 对于 $v < k/b$, 解的能量会随着时间增加。假设我们有两个不同的周期解 $v_1(\theta), v_2(\theta)$, 在 $v - \theta$ 平面上, 两个解是不相交的, 所以可以假设 $v_1 > v_2$, 然而对于一个周期内,

$$0 = \Delta E = \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (k - bv) d\theta$$

但是 $0 = \Delta E_1 - \Delta E_2 = \int_0^{2\pi} -b(v_1 - v_2) d\theta \neq 0$ 会得出矛盾, 于是就有了了解的唯一性。

V. 混沌现象与分岔

对于不同的 k, b 取值, 系统的性质, 我们组经过长时间的讨论, 认为这是一个相当困难的问题。现在对于这个问题的认识是: 对于一些 k, b 的取值, 可以做到周期解和稳定平衡点共存; 对于一些取值, 只存在周期解 (这里主要是 $k > 1$ 的情况); 而对于 b 足够大, 而 $k < 1$ 的情

图 4: $b = 1, k = 0.2$ 的吸引盆

形，甚至可以不存在周期解，只有稳定平衡点。对于这样的问题，我们能做到的，只能是定性判断，并用程序作图，而在能力范围之内，并不能证明这样现象的合理性。

这个系统一定有吸引子：可能是稳定平衡点，也可能是周期解。对于不同参数 k, b 下吸引盆的大小的估计，是我们遇到的一个难题。这里不太可能应用 **Lasalle** 定理，因为 **Lasalle** 定理要求对正不变集有一定的估计，然而这也是一个同样困难的问题。

对于只有一个吸引子的吸引盆，我们基本可以确定它是全局的吸引子：如果只有周期解或者只有稳定平衡点，那么它一定是吸引子（貌似可以证明）；对于周期解和稳定平衡点共存的情况一般来说各有各的吸引盆。

而对于分岔现象，即 $k < 1$ 时，周期解消失的那个分岔点，其实与 b 的大小有直接关系。我们试图这样去描述：对于初始条件 $\theta(0) = 0, v(0) = v_0 > 0$ ，当 v_0 比较小的时候，解曲线在 $\theta \in [0, 2\pi]$ 会走到 $v = 0$ 这一种状态，这时候 **Poincaré** 映射是不存在的，记 \underline{v}_0 是 **Poincaré** 映射存在的最小 v_0 ，而这个 \underline{v}_0 的大小，应该与 b, k 的取值有关。

如果 $p(\underline{v}_0) > \underline{v}_0$ ，那么就可以利用 **Banach** 不动点定理，得到周期解的存在性，而如果 $p(\underline{v}_0) \leq \underline{v}_0$ 时，就是周期解不存在，所有解曲线都会收敛到稳定解的情形。对于 $p(\underline{v}_0) = \underline{v}_0$ ，就是所说的“分岔”：这个时候周期解正好存在， b 如果增大，那么周期解一定消失。

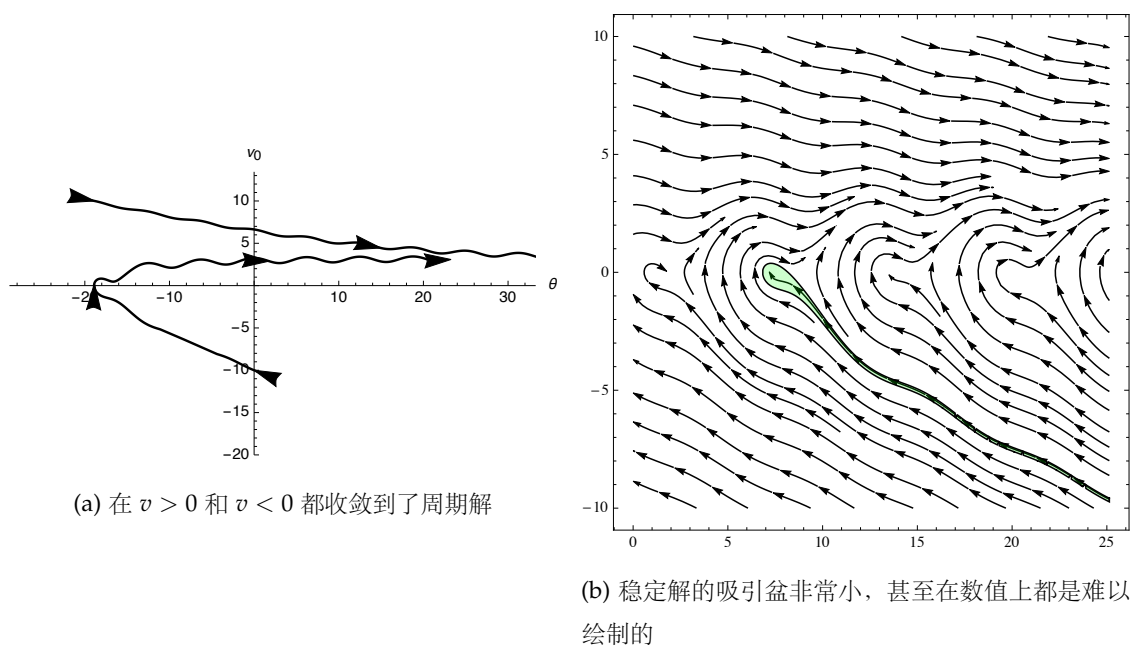


图 5: $b = 0.3, k = 0.95$, 稳定解和周期解共存

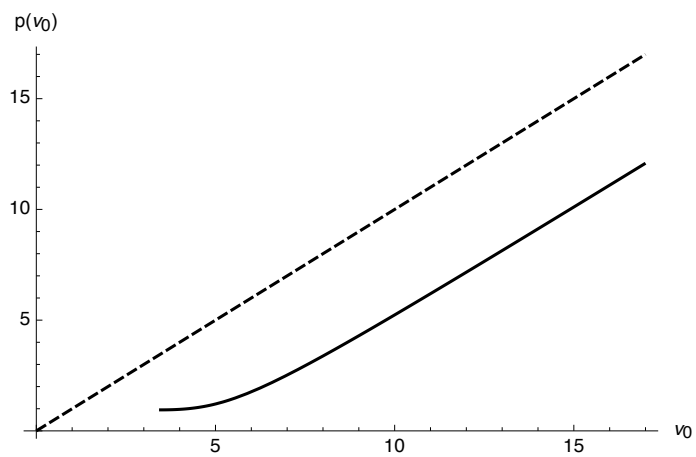


图 6: 在一定条件下，有定义的 Poincaré 映射，是没有不动点的